NT 235 **2014**

O PROBLEMA DO TEMPO DE ESPERA DE PEDESTRE

Sun Hsien Ming

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo, entre outros, ilustrar a complexidade de problemas de trânsito, por meio de um simples e prosaico problema de estimar quanto um pedestre espera em média para atravessar uma rua. O problema, aparentemente simples, exige cálculos nada triviais para a sua solução. Esse problema foi encontrado no livro "*Stochastic Processes*" (Processos Estocásticos) de Sheldon M. Ross[1].

A complexidade do problema decorre que as variáveis envolvidas são aleatórias. Ora, o trânsito é um fenômeno essencialmente aleatório e o seu estudo não pode dispensar ou ignorar essa sua natureza. Apesar desta óbvia constatação, verifica-se que, na prática, a aleatoriedade dos fenômenos não é levada em conta na solução dos problemas de trânsito, uma vez que, normalmente, os problemas são resolvidos empiricamente, na base do "bom senso", utilizando-se valores médios como se fossem constantes.

Por exemplo, se a questão é dimensionar uma faixa para conversão à esquerda numa interseção semaforizada, não se pode simplesmente fazer uma contagem dos veículos que fazem essa conversão e efetuar o seguinte cálculo singelo: $f \times t_v \times c$, onde "f" é o fluxo de veículos que fazem a conversão, obtido na contagem, em veículos por segundo; "t_v" é o tempo de vermelho para a conversão, em segundos e "c" é o comprimento do veículo, em metros. Seria necessário tratar de forma adequada as variáveis que são aleatórias, bem como considerar a probabilidade de haver fila remanescente no início do tempo de vermelho nas situações em que o tempo de verde não foi suficiente para escoar todos os veículos da conversão.

Por outro lado, pode parecer, à primeira vista, que, com o advento de programas e políticas de proteção ao pedestre, que pretendem que a preferência a que o pedestre

[1] O problema em questão é o exercício 2.11 na página 91 do livro.

tem direito por lei seja efetivamente cumprida na prática, o pedestre não teria mais tempo de espera e, portanto, não haveria mais a necessidade de estimá-lo. Entretanto, apesar do respeito à preferência do pedestre, continuam existindo várias situações em que é necessário estimar o tempo de espera de pedestre, o que sustenta a relevância da questão entre as medidas que visam dar maior segurança e conforto ao pedestre.

Um exemplo que ilustra como o problema de estimar o tempo de espera do pedestre continua atual e necessário é o fato do Manual Brasileiro de Sinalização de Trânsito – Volume V – Sinalização Semafórica, que entrou em vigor em abril de 2014 através da Resolução 483 do CONTRAN, no seu item 4.2.3, considerar a necessidade de implantar uma sinalização semafórica tomando por base o tempo de espera dos pedestres e dos condutores.

OBJETIVO DO TRABALHO

O trabalho não tem como objetivo principal apresentar metodologias para estimar o tempo médio de espera de pedestres, mas, sim, usar esse problema para ressaltar a importância da criação de modelos matemáticos para projetar ou estimar resultados sem a necessidade de medições em campo, seja porque tais medições são impossíveis ou difíceis de realizar, seja porque seus custos são muito altos para o porte do projeto. Para a aplicação do modelo, também são necessários dados coletados em campo. Porém, em geral, os dados de entrada do modelo são mais fáceis de coletar do que as medições propriamente ditas.

Entretanto, a maior vantagem de um modelo é que ele pode ser aplicado para qualquer situação ou local, desde que haja dados apropriados. As medições, pelo contrário, só valem para os locais onde foram feitas.

Outro fato que se pretende ressaltar no trabalho é a importância de entender o modelo e as suas hipóteses.

Todo modelo é baseado em hipóteses, o que limita a sua aplicação. A aplicação do modelo em locais ou situações onde não são verdadeiras as hipóteses adotadas leva a que os resultados obtidos não sejam realistas.

Por outro lado, também é imprescindível o entendimento da metodologia adotada pelo modelo para determinar a sua precisão.

Neste trabalho, são apresentados dois modelos para o mesmo problema, resultando em precisões diferentes.

As observações sobre as hipóteses e a metodologia do modelo são válidas para os simuladores de tráfego, sejam eles macroscópicos, mesoscópicos ou microscópicos[2]. Por trás de cada simulador, há um modelo no qual está baseado. Sem entender as hipóteses e a metodologia do modelo, não há como fazer uma crítica ou uma avaliação sobre a consistência dos resultados da simulação ou da sua precisão.

O PROBLEMA PROPOSTO

O fluxo médio de veículos numa rua de mão única de direção de tráfego é λ (em veículos/segundo). Um pedestre chega e espera para atravessar a rua. O pedestre só atravessa a rua se houver uma brecha entre veículos de T segundos. Qual é o tempo médio de espera desse pedestre? (Note, por exemplo, que, se houver uma brecha de T segundos no instante em que o pedestre chega, o tempo de espera é zero, pois o pedestre atravessa assim que chega).

Em vez de medir diretamente o tempo médio de espera do pedestre, pode-se criar um modelo que estima esse tempo médio. Assim, em vez de medir diretamente o tempo de espera dos pedestres, basta coletar dados como o fluxo λ e o tempo de travessia T. Uma vez criado o modelo, ele vale para qualquer período do dia e qualquer que seja o local, bastando coletar os valores correspondentes de λ e T.

CONCEITOS BÁSICOS

Esta seção tem por objetivo expor alguns conceitos básicos, necessários para a compreensão das soluções, apresentadas na seção seguinte, do problema proposto.

Variável aleatória

Uma variável aleatória representa um fenômeno ou um experimento que fornece resultados não determinísticos, ditos "aleatórios".

---

[2] No modelo macroscópico não se considera o movimento ou o comportamento individual de cada veículo, mas considera o trânsito de forma coletiva. No modelo microscópico são simulados os movimentos de cada veículo.
O modelo mesoscópico é o intermediário entre o modelo macroscópico e microscópico, simulando a interação entre o motorista e o tráfego. As simulações dos movimentos de grupos de veículos ou pelotões, como aqueles formados em aproximações semaforizadas são um exemplo de aplicação de modelo mesoscópico.

Uma variável aleatória pode ser contínua ou discreta.

No caso de variável aleatória discreta, os resultados possíveis do experimento são números inteiros. Por exemplo, lançamento de um dado, chegada de veículos, etc.

No caso de variável aleatória contínua, os resultados possíveis podem ser qualquer número real. Por exemplo, a altura de uma pessoa, o peso de um objeto, o intervalo de tempo entre chegada de veículos, etc.

Processo estocástico

Um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias indexadas.

Probabilidade

A probabilidade de ocorrer um evento A é expressa por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \tag{1}$$

onde $n(A)$ é o número de possibilidades de ocorrer o evento A e $n(S)$ é o número de elemento do espaço amostral[3] S.

Por exemplo, qual é a probabilidade de tirar um rei em um baralho?

Seja A = evento de tirar um rei.
Seja S = espaço amostral – todas as cartas do baralho.

$n(A) = 4$ (existem 4 reis no baralho)
$n(S) = 52$ (existem 52 cartas no baralho).

Então: $P(A) = n(A)/n(S) = 4/52 = 1/13.$

Distribuição de probabilidade

Uma distribuição de probabilidade descreve a probabilidade que uma variável aleatória pode assumir para cada valor possível. Por exemplo, no lançamento de um

[3] **Espaço amostral** é o conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer em um experimento aleatório.

dado, os resultados possíveis são {1, 2, 3, 4, 5, 6}. A sua distribuição de probabilidades é:

Resultados possíveis $X = x_i$	Probabilidade $P(X = x_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
Soma	1

Tabela 1

Note que a soma das probabilidades de todos os resultados possíveis deve ser igual a 1.

A distribuição de probabilidade também pode ser discreta ou contínua.

Uma distribuição de probabilidade é chamada de distribuição discreta se o conjunto dos resultados possíveis for um conjunto contável e discreto. Por exemplo, a distribuição mostrada na Tabela 1 é uma distribuição discreta, onde os resultados possíveis são definidos num conjunto contável (no caso, de 6 elementos) e discreto[4].

Se a variável aleatória X for contínua, a sua distribuição de probabilidade será contínua se os valores dos resultados possíveis puderem ser associados à sua probabilidade por meio de uma função $f(x)$, denominada função densidade de probabilidade[5].

Distribuição de Poisson

---

[4] O conjunto dos resultados possíveis deve ser um conjunto contável (que pode ser contado) e discreto (entre dois valores consecutivos, não pode haver valores intermediários), mas não precisa ser finito (pode haver um número infinito de elementos).

[5] Dizemos que $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade da variável aleatória contínua X se forem satisfeitas as duas condições seguintes:

a) $f(x)$ é não negativa, isto é, $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathfrak{R}$
b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

A distribuição de Poisson é uma distribuição de probabilidade de variável aleatória discreta que expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo se estes eventos ocorrem independentemente de quando ocorreu o último evento. Em outras palavras, ela expressa a probabilidade de certo número de eventos ocorrerem num dado período de tempo t, caso estes ocorram com uma taxa média conhecida λ e caso cada evento seja independente do tempo decorrido desde o último evento. Por exemplo, num ponto de ônibus a probabilidade de chegar o próximo ônibus é independente de quando chegou o último ônibus (onde a ocorrência do evento é a chegada do ônibus).

Na distribuição de Poisson, a probabilidade de ocorrer k eventos no período de tempo t é expressa por:

$$P(X = k, t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \qquad (2)$$

onde λ é o número médio de eventos e $P(X = k, t)$ é a probabilidade de ocorrer k eventos no período de tempo t. Diz-se que λt é o parâmetro da distribuição.

Segue abaixo um exemplo da diferença entre o modelo determinístico e o modelo probabilístico com distribuição de Poisson:

Se em uma aproximação semaforizada, o fluxo é de 360 veículos/hora e estamos interessados em saber o número de veículos que chegam num ciclo de 120 segundos:

a) No modelo determinístico, teríamos que em 120 segundos chegariam $(360/3600) \times 120 = 12$ veículos.

b) No modelo probabilístico (supondo que vale a distribuição de Poisson), pode-se estimar qual é a chance (probabilidade) de chegar 12 veículos em um ciclo, conforme segue:

   $\lambda = 360/3600 = 0{,}1$ veículos/segundo
   $t = 120$ segundos
   $\lambda t = 0{,}1 \times 120 = 12$ veículos
   $k = 12$ veículos

   $P(X = 12, t = 120) = (12^{12} \times e^{-12})/12! = 11{,}4\%$

Portanto, a chance ou a probabilidade de chegarem 12 veículos em 120 segundos é de apenas 11,4%, apesar de, na média, chegar 0,1 veículos a cada segundo!

Imagine agora que um engenheiro de tráfego esteja regulando essa aproximação e ele observa que, num determinado ciclo, chegaram 12 veículos e que ele ajuste o tempo de verde para escoar os 12 veículos que chegaram nesse ciclo. Qual é a probabilidade de que esse tempo de verde não esteja ajustado para o próximo ciclo? A probabilidade de que esse tempo de verde não seja adequado para o próximo ciclo é de 88,6%! Ou seja, existe mais de 88% de chance de que o tempo de verde seja insuficiente ou que fique ocioso no próximo ciclo!

Logo, é preciso ter cautela ao trabalhar com valores médios ou com valores históricos.

Distribuição geométrica

A distribuição geométrica é uma distribuição de probabilidade de variável aleatória discreta que expressa a probabilidade do número X de tentativas de Bernoulli[6] necessárias para alcançar um sucesso.

Na distribuição geométrica, a probabilidade de se alcançar um sucesso após n tentativas ($n - 1$ tentatitvas com insucesso e com sucesso apenas na n-ésima tentativa) é expressa por:

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p \tag{3}$$

onde p é a probabilidade de ocorrer um sucesso. Diz-se que p é o parâmetro da distribuição.

Por exemplo, suponha um dado que é lançado repetidamente até a primeira vez que aparece um "1" (a ocorrência de “1” é um sucesso). A probabilidade de ocorrer o número “1” apenas no terceiro lançamento é:

$n = 3$
$p = 1/6$

$P(X = 3) = (1 - 1/6)^{3-1} \times (1/6) = 11{,}6\%$

[6] Uma **tentativa de Bernoulli** é uma experiência aleatória com apenas dois resultados possíveis, denotados por "sucesso" ou "insucesso”.

Distribuição exponencial

A distribuição exponencial é uma distribuição de probabilidade de variável aleatória contínua, com função densidade de probabilidade $f(x)$ expressa por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \; para \; x \geq 0 \\ 0 \; para \; x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

onde λ é o parâmetro da função.

A distribuição exponencial é uma distribuição contínua utilizada para modelar o tempo entre ocorrências de eventos num processo de Poisson. Assim, se a chegada de veículos segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λt, então, o intervalo de tempo entre veículos consecutivos segue uma distribuição exponencial de parâmetro λ.

Probabilidade condicional

A probabilidade condicional refere-se à probabilidade de ocorrer um evento A sabendo que ocorreu um outro evento B e representa-se por $P(A|B)$, lida como "probabilidade condicional de A dado B".

A probabilidade condicional de A dado B, sendo $P(B) > 0$, é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{5}$$

Na expressão (5), $A \cap B$ significa a interseção dos conjuntos A e B, ou seja, $A \cap B$ é o conjunto dos elementos que são comuns a A e a B.

$P(A \cap B)$ é expressa como:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \tag{6}$$

onde $n(A \cap B)$ denota o número de elementos do conjunto $A \cap B$ e $n(S)$ denota o número de elementos do espaço amostral S.

Por exemplo, considere-se um baralho de 52 cartas. A probabilidade de, ao retirar uma carta, sair um rei é 4/52, ou 1/13. No entanto, se alguém retira uma carta e nos diz que é uma figura, qual é a probabilidade de a carta retirada ser um rei?

Seja A = sair um rei.
Seja B = sair uma figura (rei, dama ou valete).

$n(A) = 4$ (A tem 4 reis)
$n(B) = 12$ (B tem 12 figuras)
$n(S) = 52$ (espaço amostral S tem 52 cartas)
$n(A \cap B) = 4$ (elementos comuns a A e a B: os 4 reis).

$P(A) = 4/52 = 1/13$
$P(B) = 12/52 = 3/13$

Pela expressão (6), $P(A \cap B) = 4/52 = 1/13$.

Pela expressão (5), $P(A|B) = (1/13)/(3/13) = 1/3$.

Logo, a chance de sair um rei dado que saiu uma figura é 1/3.

Se os eventos A e B forem independentes, isto é, a ocorrência de A não depende da ocorrência de B, então $P(A|B) = P(A)$.

Propriedade de "falta de memória"

No caso de distribuição exponencial, uma propriedade importante é que ela é "sem memória", isto é:

Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial, então sua probabilidade condicional obedece à expressão:

$P(X > p + q|X > p) = P(X > q)$ para todo $p, q > 0$

Por exemplo: $P(X > 20 + 10|X > 20) = P(X > 10)$.

Isso significa que a probabilidade de que seja necessário esperar mais que 30 segundos até que o evento aconteça, dado que esse evento não aconteceu antes de 20 segundos, é a mesma de que esse evento ocorra depois dos 10 segundos iniciais.

Transportando o exemplo para a espera em um ponto de ônibus:

Imagine que uma pessoa A chega no ponto de ônibus no instante $t = 0$. Após 20 minutos de espera, não chegou nenhum ônibus. Qual é a probabilidade de a espera de A ser maior que 30 minutos?

Imagine agora que uma pessoa B chega no ponto de ônibus no instante $t = 20$. Qual é a probabilidade de a espera de B ser maior que 10 minutos?

A resposta é que as duas probabilidades são iguais. É como se A também tivesse chegado no ponto de ônibus no instante $t = 20$. Os 20 minutos que A esperou não são "memorizados". O fato de A já ter esperado 20 minutos não aumenta a chance de vir ônibus nos próximos 10 minutos.

Distribuição de probabilidade condicional

Se X e Y são variáveis aleatórias discretas sobre o mesmo espaço amostral S, então $P(X|Y = y)$ tem uma distribuição de probabilidade, denominada distribuição de probabilidade condicional de X dado que ocorreu $Y = y$.

Note que:

a) $X|Y = y$ é uma variável aleatória que representa o conjunto de todos os valores possíveis de X, dado que ocorreu $Y = y$, associados a uma probabilidade $P(X|Y = y)$. Daí, faz sentido que $X|Y = y$ tenha uma distribuição de probabilidade.

b) $X|Y = y_1$ e $X|Y = y_2$ são variáveis aleatórias distintas, com distribuições de probabilidade distintas.

Média e variância

A média e a variância são os principais parâmetros (ou momentos) de uma variável aleatória.

A média é a média aritmética dos valores que a variável aleatória pode assumir.

A variância é uma medida da dispersão, indicando quão longe os valores se encontram ou se afastam da média.

É importante distinguir a média e a variância de uma população, de uma amostra e de uma distribuição de probabilidade.

a) Média e variância de uma população

A média μ de uma população $\{x_1, \dots, x_N\}$ de N elementos é a média aritmética de x_i, para $i = \{1,2, \dots, N\}$.

A variância de uma população $\{x_1, \dots, x_N\}$ de N elementos é a medida de dispersão definida como a média aritmética do quadrado dos desvios dos elementos da população em relação à média populacional μ. Ou seja, a variância populacional σ^2 é dada por:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \mu)^2}{N} \tag{7}$$

b) Média e variância amostral

Em geral, não se conhecem os verdadeiros valores da média μ e da variância σ^2 de uma população. Assim, são usados estimadores para estimar esses valores. Os principais estimadores são a média e a variância amostral (média e variância de uma amostra extraída da população).

Para que a média e a variância de uma amostra sejam bons estimadores da média e variância da população é necessário que a amostra seja aleatória. Uma amostra é aleatória se todos os elementos da população tiverem a mesma probabilidade de pertencer à amostra. Uma amostra não aleatória é dita viciada ou enviesada.

A média $\bar{x}$ de uma amostra $\{x_1, \dots, x_n\}$ de n elementos é a média aritmética de x_i, para $i = \{1,2, \dots, n\}$.

A variância de uma amostra $\{x_1, \dots, x_n\}$ de n elementos é definida como a soma dos quadrados dos desvios dos elementos da amostra em relação à sua média $\bar{x}$, dividido por $(n-1)$. Ou seja, a variância amostral é dada por:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \tag{8}$$

Ao utilizarmos a média amostral $\bar{x}$ como estimador de μ para calcularmos a variância amostral s^2, perdemos 1 grau de liberdade em relação à variância populacional σ^2. Daí, dividirmos por $(n-1)$ e não por n. Em outras palavras, a variância de uma amostra não é exatamente a média aritmética do quadrado dos desvios dos elementos da amostra em relação à sua média $\bar{x}$ (como é a variância de uma população).

A indicação de que $\bar{x}$ e s^2 são estimadores de μ e σ^2, respectivamente, é representada pela seguinte nomenclatura, onde o símbolo "^" representa "estimador":

$\hat{\mu} = \bar{x}$ e $\hat{\sigma}^2 = s^2$.

O desvio padrão s de uma amostra é a raiz quadrada da sua variância.

c) Média de uma distribuição de probabilidade

A média de uma distribuição de probabilidade também é conhecida como a esperança matemática da distribuição (ou o valor esperado, ou ainda, a média teórica da distribuição).

A esperança $E[X]$ de uma distribuição de probabilidade discreta é dada por:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) \quad (9)$$

onde $P(X = x_i)$ é a probabilidade de a variável aleatória X assumir o valor x_i.

No exemplo da distribuição da Tabela 1, teríamos, pela expressão (9):

$E[X] = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3{,}5$

Imagine que lancemos o dado 3 vezes, obtendo o seguinte resultado: $\{5,1,3\}$. A média dessa amostra de 3 lançamentos é 4,5. Se o número de lançamentos for muito grande, a média da amostra irá se aproximar da média teórica de 3,5. Se o número de lançamentos fosse infinito, a média seria igual à média teórica.

Se X for uma variável aleatória contínua, a esperança $E[X]$ é expressa por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (10)$$

onde $f(x)$ é a função densidade de probabilidade de X.

No caso da distribuição de Poisson de parâmetro λt, pode-se mostrar que $E[X] = \lambda t$.

No caso de uma distribuição geométrica de parâmetro p, pode-se mostrar que $E[X] = 1/p$.

No caso de uma distribuição exponencial de parâmetro λ, pode-se mostrar que $E[X] = 1/\lambda$.

No caso de uma distribuição condicional $X|Y = y$, pode-se determinar o seu valor médio $E[X|Y = y]$.

Como $E[X|Y = y]$, por sua vez, também é uma variável aleatória (por ser função de $Y = y$), pode-se determinar o seu valor médio $E\big[E[X|Y = y]\big]$.

Pode-se mostrar que $E\big[E[X|Y = y]\big] = E[X]$.

d) Variância de uma distribuição de probabilidade

A variância $Var[X]$ de uma distribuição de probabilidade é dada por:

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \quad (11)$$

No exemplo da Tabela 1, teríamos, pela expressão (11):

$(E[X])^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25$

$E[X^2] = \sum_{i=6}^{6} x_i^2 P\,(X = x_i) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} = 15{,}17$

$Var[X] = 15{,}17 - 12{,}25 = 2{,}92$

No caso da distribuição de Poisson de parâmetro λt, pode-se mostrar que $Var[X] = \lambda t$, isto é, $E(X) = Var[X] = \lambda t$.

No caso de uma distribuição geométrica de parâmetro p, pode-se mostrar que $Var[X] = (1 - p)/p^2$.

No caso de uma distribuição exponencial de parâmetro λ, pode-se mostrar que $Var[X] = 1/\lambda^2$.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

É possível demonstrar que um modelo determinístico não é adequado para determinar a solução do problema proposto. De fato, num modelo determinístico, se o pedestre só atravessa quando há uma brecha de T segundos e se o intervalo entre veículos fosse menor que T, então o pedestre nunca atravessaria a via, o que não é verdade na prática. Assim, o modelo determinístico não é um modelo realista.

Em modelos estocásticos, a solução do problema proposto implica em assumir uma hipótese. A hipótese adotada aqui é que a chegada dos veículos obedece a uma distribuição de Poisson (que nem sempre é verdadeira). Essa hipótese é mais realista em situações de trânsito livre, onde a velocidade de um veículo não é afetada por outros veículos, isto é, a chegada de um veículo é independente da chegada de outro veículo.

A seguir, são mostradas duas abordagens possíveis para a solução do problema proposto. Os cálculos, devido à sua extensão e complexidade, não são mostrados no corpo do trabalho, mas são apresentados no Apêndice.

Primeiro Modelo

Essa solução considera o tempo como uma variável aleatória discreta, medido em unidades de T.

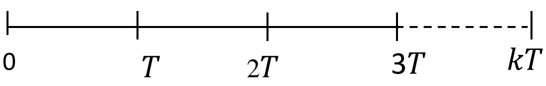


Figura 1

Seja W a variável aleatória que representa a espera do pedestre e $E[W]$ o seu valor esperado.

Seja $N(t)$ a chegada de carros, com $t = \{T, 2T, 3T, \dots kT\}$.

Então, $N(t)$, pela hipótese adotada, segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λt.

Na Figura 2, se não chegar nenhum veículo no intervalo $(0, T)$, então $W = 0$.

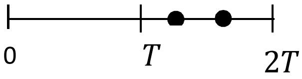


Figura 2

Na Figura 3, se chegar um ou mais veículos no intervalo $(0, T)$, mas não chegar nenhum veículo no intervalo $(T, 2T)$, então $W = T$.

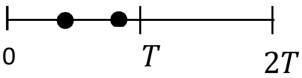


Figura 3

Na Figura 4, se chegar um ou mais veículos em todos os intervalos $(0, T)$, $(T, 2T)$ ... $((k-2)T, (k-1)T)$ e não chegar veículos no intervalo $((k-1)T, kT)$, onde $k = \{1,2, \dots\}$, então $W = (k-1)T$.

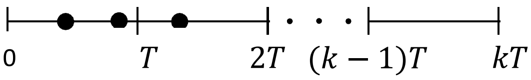


Figura 4

Pode-se mostrar que o problema recai numa distribuição geométrica de parâmetro $p = e^{-\lambda t}$.

Efetuando-se os cálculos necessários, pode-se mostrar que:

$$E[W] = \left(e^{\lambda T} - 1\right)T \qquad (12)$$

Este método superestima o valor real do tempo de espera do pedestre devido ao fato de considerar apenas unidades inteiras de T.

De fato:

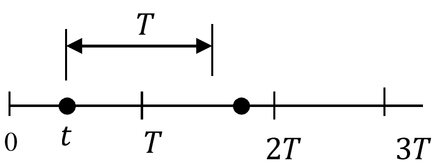


Figura 5

Considerando a Figura 5, o pedestre começa a atravessar a rua logo após o instante t e não após o instante $2T$. No cálculo proposto, a espera foi considerada como sendo de $2T$ quando a espera real é de apenas t. Portanto, no cálculo empregado não são consideradas brechas maiores ou iguais a T entre os intervalos de duração T.

Segundo Modelo

Essa solução considera o tempo como uma variável aleatória contínua.

Seja W a espera do pedestre e seja $E[W]$ o valor esperado de W.

A Figura 6 mostra o instante 0 como o instante em que o pedestre chega. T_1 é o tempo da chegada do primeiro veículo após a chegada do pedestre, T_2 é o tempo de chegada do segundo veículo após a chegada do pedestre, e assim por diante.

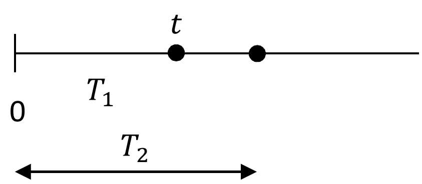


Figura 6

Assim, T_1, T_2, ... formam um conjunto de variáveis aleatórias indexadas. Logo, o fenômeno tratado é um processo estocástico.

A Figura 7 mostra o caso em que quando o pedestre chega, ele já encontra uma brecha maior que T segundos e, portanto, o tempo de espera W é zero.

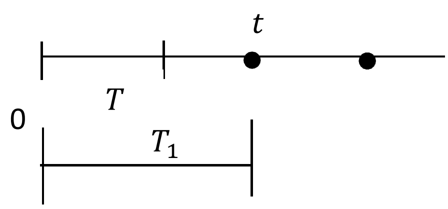


Figura 7

A Figura 8 mostra o caso em que quando o pedestre chega, ele não encontra uma brecha maior que T segundos.

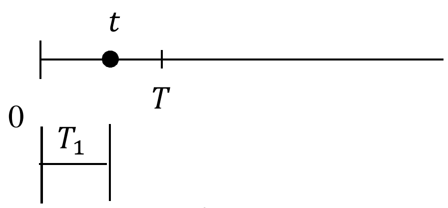


Figura 8

Essa solução considera a distribuição condicional de $W|T_1 = t$, sendo que, como a chegada de veículos é uma distribuição de Poisson, então o intervalo entre veículos segue uma distribuição exponencial, além do fato de a distribuição exponencial ser "sem memória".

Após os cálculos necessários, pode-se mostrar que:

$$E[W] = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda T} - 1\right) - T \tag{13}$$

COMPARAÇÃO ENTRE AS DUAS SOLUÇÕES

O quadro abaixo fornece os resultados numéricos obtidos utilizando-se as duas soluções, expressões (12) e (13), respectivamente, para $T = 10$ segundos e diversos valores de fluxo veicular F (veículos/hora).

F	λ	$1/\lambda$	T	$E(W)$ 1° Modelo	$E(W)$ 2° Modelo
(v/h)	(v/s)	(s)	(s)	(s)	(s)
10	0,002778	360	10	0	0
20	0,005556	180	10	1	0
30	0,008333	120	10	1	0
40	0,011111	90	10	1	1
50	0,013889	72	10	1	1
60	0,016667	60	10	2	1
100	0,027778	36	10	3	2
140	0,038889	26	10	5	2
150	0,041667	24	10	5	2
300	0,083333	12	10	13	6
600	0,166667	6	10	43	16
1200	0,333333	3	10	270	71
1600	0,444444	2,25	10	842	179

Tabela 2

Pode-se observar nitidamente que, à medida que crescem os valores de fluxo, os resultados da primeira solução são significativamente superiores aos da segunda solução. Isso já era esperado tendo em vista a observação anteriormente feita de que a primeira solução não considera brechas iguais ou maiores que T entre os intervalos $\left((k-1)T; kT\right)$. A discrepância entre os dois resultados deve ser ainda mais patente com valores maiores de T.

CONCLUSÕES

Foram apresentadas duas soluções para o mesmo problema, utilizando-se abordagens diferentes: a primeira tratando o tempo como unidade discreta (em unidades de T) e a segunda tratando o tempo como uma grandeza contínua. Outras soluções são possíveis utilizando-se de metodologias e de abordagens distintas.

O fato de o primeiro modelo superestimar o tempo médio de espera não significa que ele seja inútil. Os resultados mostram que, para fluxos baixos, é indiferente o uso de qualquer um dos modelos. Logo, para fluxos baixos, o primeiro modelo pode ser perfeitamente utilizável. Por outro lado, para fluxos muito altos, pode ser que nenhum dos dois modelos seja adequado, pois a hipótese de distribuição de Poisson para a chegada dos veículos pode não ser mais verdadeira.

Qualquer que seja a solução adotada, os cálculos não são triviais, mostrando a complexidade de problemas aparentemente simples e que podem ser encontrados em situações bastante comuns.

Deve-se observar que o problema proposto é uma simplificação de problemas reais de estimar o atraso de pedestres. As soluções apresentadas supõem a hipótese de que os pedestres nunca chegam e atravessam em grupo (sempre chegam sozinhos e atravessam sozinhos, o que nem sempre é uma situação real). Por exemplo, não se pode utilizar o resultado aqui obtido para estimar o atraso total de pedestres numa travessia multiplicando pelo volume médio de pedestres para situações em que os pedestres chegam e atravessam em grupo, aproveitando-se da mesma brecha. Ou seja, se $F = 300$ v/h, $T = 10$ s e o volume médio de pedestres for $V = 100$ p/h, não se pode afirmar que o atraso total de pedestres é de 6 s $\times$ 100 = 600 segundos/hora se houver chegadas e travessias em grupos (adotando-se o valor obtido pela segunda solução de 6 segundos na Tabela 2). Para travessias em grupo, a abordagem deve ser distinta das aqui apresentadas[7].

[7] Ver o artigo "*The Delay to Pedestrians Crossing a Road*" de *J. C. Tanner – Biometrika*, Vol. 38, N° 1/4 (Dec, 1951), pp. 383-392.

APÊNDICE

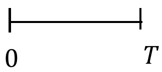
PRIMEIRO MODELO

Seja $N(t)$ a chegada de carros, cujo valor médio é λ.

Pela hipótese, $N(t)$ é uma distribuição de Poisson de parâmetro λt, isto é:

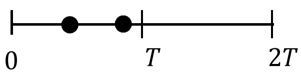
$N(t) \sim$ Poisson (λt)

Seja W o tempo de espera do pedestre.

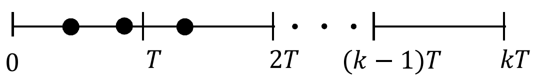


O instante 0 é o instante em que chega o pedestre.

$$W = 0 \rightarrow P(W = 0) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda T} = p$$



$$W = T \rightarrow \; P(W = T) = P(N(T) > 0) \times P(N(2T) - N(T) = 0) = (1 - p)p$$



$$W = (k-1)T \rightarrow P(W = (k-1)T) = P(N(T) > 0) \times P(N(2T) - N(T) > 0) \times \ldots \times P\big(N(kT) - N\big((k-1)T\big) = 0\big) = (1-p)^{k-1}p$$

$k = 1,2, \ldots$

$k = W/T + 1$

$P(W/T + 1 = k) = (1 - p)^{k-1}p, k = 1, 2, \dots$

A variável aleatória $(W/T + 1)$ é uma distribuição geométrica de parâmetro p, isto é:

$W/T + 1 \sim$ Geométrica (p)

Então:

$E[W/T + 1] = 1/p$

Por outro lado:

$E[W/T + 1] = E[W/T] + 1 = E[W]/T + 1$

Logo:

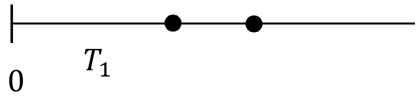
$E[W]/T + 1 = 1/p$

$$E[W] = \left(\frac{1}{p} - 1\right)T = \frac{(1 - p)T}{p}$$

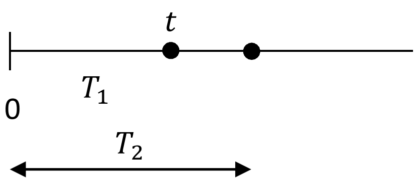
$$E[W] = \frac{\left(1 - e^{-\lambda T}\right)T}{e^{-\lambda T}} = \left(e^{\lambda T} - 1\right)T$$

SEGUNDO MÉTODO

Seja W a variável aleatória que denota a espera do pedestre.



O instante 0 é o instante em que o pedestre chega. T_1 é o tempo da chegada do primeiro veículo após a chegada do pedestre, T_2 é o tempo de chegada do segundo veículo após a chegada do pedestre, e assim por diante.



Assim, T_1, T_2, ... é um conjunto de variáveis aleatórias indexadas. Logo, o fenômeno tratado é um processo estocástico.

Considere a distribuição condicional $W|T_1 = t$ e o seu valor esperado $E[W|T_1 = t]$.

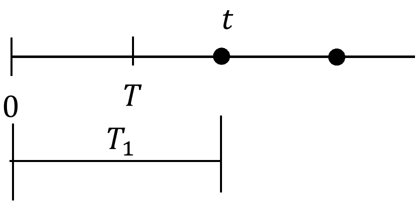
Então, tem-se que:

$$E\big[E[W|T_1 = t]\big] = E[W]$$

Usando a expressão (10), onde $f(t)$ é uma distribuição exponencial de parâmetro λt:

$$E[W] = E\big[E[W|T_1 = t]\big] = \int_0^\infty E[W|T_1 = t] f(t) dt = \int_0^\infty E[W|T_1 = t]\lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$E[W] = \int_0^T E[W|T_1 = t]\lambda e^{-\lambda t} dt + \int_T^\infty E[W|T_1 = t]\lambda e^{-\lambda t} dt$$



Se t estiver no intervalo (T, ∞), então não passou nenhum carro no intervalo $(0, T)$ e a espera W é zero.

Portanto:

$$\int_T^\infty E[W|T_1 = t]\lambda e^{-\lambda t} dt = 0$$

Então:

$$E[W] = \int_0^T E[W|T_1 = t]\lambda e^{-\lambda t} dt$$

Como a exponencial é "sem memória", a espera no instante t é igual à espera na origem (ou, em outras palavras, pode-se considerar a nova origem no instante t).

$$E[W|T_1 = t] = E[t + W] = E[t] + E[W] = t + E[W]$$

$$E[W] = \int_0^T (t + E[W])\lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^T t\lambda e^{-\lambda t} dt + \int_0^T E[W]\lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$E[W] = \int_0^T t\lambda e^{-\lambda t} dt + E[W] \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$\int \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}$$

$$\int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^T = 1 - e^{-\lambda T}$$

$$\int x\lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \left(x + \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\int_0^T t\lambda e^{-\lambda t} dt = -\, e^{-\lambda t} \left(t + \frac{1}{\lambda} \right) \Big|_0^T = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda T}\right) - Te^{-\lambda T}$$

$$E[W] = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda T}\right) - Te^{-\lambda T} + E[W]\left(1 - e^{-\lambda T}\right)$$

$$E[W] = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda T} - 1\right) - T$$